

# Zu den Rotationszuständen der Atomkerne

## I. Berechnung des Trägheitsmoments

Von GERHART LÜDERS

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforsch. 11 a, 617–626 [1956]; eingegangen am 18. Mai 1956)

Zur Berechnung des für eine Rotationsbande eines schweren Atomkerns charakteristischen Trägheitsmoments haben A. BOHR und B. MOTTELSON neuerdings ein auf INGLIS zurückgehendes Verfahren verwendet. Es wird gezeigt, daß man praktisch das gleiche Resultat, nämlich ein den hydrodynamischen Wert erheblich übersteigendes Trägheitsmoment, bereits bei sorgfältigerer Auswertung der früher von BOHR und MOTTELSON angegebenen Bewegungsgleichungen des kollektiven Kernmodells erhält; die quantitative Auswertung erweist sich allerdings als schwierig, da die Gültigkeitsgrenzen der Störungsrechnung überschritten werden müssen. Für kleine Abweichung des Trägheitsmoments vom hydrodynamischen Wert ist unser Resultat identisch mit dem nach INGLIS-BOHR-MOTTELSON folgenden; der Zusammenhang zwischen dem Verfahren von INGLIS und der hier vorgelegten Behandlungswweise wird diskutiert.

### 1. Einleitung und Zusammenfassung

Zur Erklärung der großen elektrischen Quadrupolmomente schwerer Kerne hat RAINWATER<sup>1</sup> die Vorstellung entwickelt, daß die – im Sinne des Schalenmodells – außerhalb abgeschlossener Schalen befindlichen Nukleonen von innen auf die Oberfläche des – nach dem Tröpfchenmodell beschriebenen – Kernrumpfes drücken und ihn dadurch verformen; auf das Quadrupolmoment wirkt sich dann in erster Linie die verformte Ladungsverteilung des Rumpfes und nur in zweiter Linie die nicht-kugelsymmetrische Ladungsverteilung der äußersten Protonenbahnen aus. Während das Modell von RAINWATER als statisches Modell gekennzeichnet werden kann (wenigstens, was die Verformung des Rumpfes angeht), wurde von A. BOHR<sup>2</sup> die Dynamik der Wechselwirkung zwischen der kollektiven Deformation des Kerns und der individuellen Nukleonenbewegung untersucht<sup>3</sup>. Aus dem allgemeinen Formalismus konnten BOHR und MOTTELSON<sup>4</sup> die Existenz von Rotationsspektren bei deformierten Kernen entnehmen, d. h. von Folgen niedrig angeregter Zustände mit den Drehimpulsen  $I_0$  (Grundzustand),  $I_0 + 1$ ,  $I_0 + 2$  usw., deren Energien durch die Rotatorformel gegeben sind:

<sup>1</sup> J. RAINWATER, Phys. Rev. **79**, 432 [1950].

<sup>2</sup> A. BOHR, Dan. Mat. Fys. Medd. **26**, Nr. 14 [1952]; im folgenden durch A abgekürzt.

<sup>3</sup> Das Modell von RAINWATER wurde in Richtung des dynamischen Aspekts unabhängig von A. REIFMAN, Z. Naturforsch. **8a**, 505 [1953], weiterentwickelt und hauptsächlich auf  $\gamma$ -n-Prozesse angewandt.

<sup>4</sup> A. BOHR u. B. MOTTELSON, Dan. Mat. Fys. Medd. **27**, Nr. 16 [1953]; im folgenden durch B abgekürzt.

<sup>5</sup> Instruktive Abbildungen der Strömungsverhältnisse finden

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2 \Theta} I(I+1). \quad (1)$$

Speziell für doppelt gerade Kerne mit  $I_0 = 0$  folgt aus Symmetrieforderungen der Theorie, daß nur jeder zweite Drehimpuls ( $I = 0, 2, 4$  usw.) wirklich vorkommt. Nach der ursprünglichen Theorie von BOHR und MOTTELSON (siehe B) sollte das Trägheitsmoment  $\Theta$  mit dem einer wirbelfreien Strömung übereinstimmen<sup>5, 6</sup>. Das Trägheitsmoment der wirbelfreien Strömung (auch als hydrodynamisches Trägheitsmoment bezeichnet) verschwindet für einen unverformten, kugelartigen Kern, denn eine wirbelfreie Strömung ist bei kugelförmiger Oberfläche überhaupt nicht möglich. Mit zunehmender Verformung (d. h. Abweichung von der Kugelgestalt) nimmt das Trägheitsmoment zu, und zwar proportional zur Vergrößerung der Oberfläche; dabei ist Verformung unter Volumenerhaltung vorausgesetzt. Bei sehr kleinen Verformungen, d.h. in der Nähe abgeschlossener Schalen, werden die aus Gl. (1) folgenden Abstände der Rotationsniveaus formal sehr groß; jedoch versagt dann die zu dieser Gleichung führende Näherung und es findet sich überhaupt keine Rotationsstruktur.

Die von der Theorie her erwarteten Rotations-

sich in A. BOHR, Rotational States of Atomic Nuclei (Thesis), Kopenhagen 1954, sowie in dem Beitrag von BOHR und MOTTELSON in Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy, herausgeg. v. K. SIEGBAHN, Amsterdam 1955.

<sup>6</sup> Im zweiten und dritten Abschnitt wird das Formelzeichen  $\Theta$  für das hydrodynamische Trägheitsmoment (=Trägheitsmoment der wirbelfreien Strömung) verwendet werden, während die aus der vorgelegten Theorie folgende Konstante in der Rotatorformel mit  $\Theta_{\text{eff}}$  bezeichnet werden wird.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

spektren der Atomkerne werden experimentell beobachtet<sup>7</sup>. In der Tat scheint das Auftreten von Rotationszuständen ein ganz allgemeiner Zug schwerer Kerne zu sein, deren Protonen- und Neutronenzahlen nicht zu nahe bei den ausgezeichneten Nukleonzahlen liegen (d. h. etwa für Massenzahlen zwischen 150 und 190 sowie oberhalb von 220). Allerdings ergibt sich eine charakteristische Schwierigkeit. Man kann nämlich – unter Zugrundelegung der Vorstellungen von RAINWATER und BOHR und MOTTELSON – die Verformung des Kerns erschließen aus seinem elektrischen Quadrupolmoment; dies zeigt sich nicht nur als statisches spektroskopisches Quadrupolmoment, es tritt auch auf in den Matrixelementen für elektrische Quadrupolübergänge innerhalb einer Rotationsbande. Aus der Verformung berechnet man das zugehörige, für wirbelfreie Strömung zu erwartende Trägheitsmoment. Es zeigt sich dann, daß das empirische Trägheitsmoment<sup>7</sup> in Gl. (1) etwa um einen Faktor der Größenordnung fünf<sup>8</sup> größer ist als der zur erschlossenen Verformung gehörige Wert für wirbelfreie Strömung. Hier scheint also eine ernste Diskrepanz zwischen der Theorie von BOHR und MOTTELSON und dem experimentellen Befund vorzuliegen.

Eine wesentlich andere Methode zur Berechnung der Trägheitsmomente von Atomkernen ist von INGLIS<sup>9</sup> angegeben worden. Er denkt sich ein verformtes Ein-Teilchen-Potential klassisch mit konstanter Winkelgeschwindigkeit gedreht und berechnet im adiabatischen Grenzfall eine Energieänderung proportional zum Quadrat der Winkelgeschwindigkeit; der Faktor wird mit dem halben Trägheitsmoment identifiziert. Für Kerne mit abgeschlossenen Schalen erhält INGLIS überraschenderweise genau das Trägheitsmoment der wirbelfreien Strömung<sup>10</sup>; allerdings hat man bei solchen Kernen in Wahrheit keine Verformung und damit keine Rotationszustände. Der in Abschn. 3 durchzuführende Vergleich zwischen dem Verfahren von INGLIS und dem hier benutzten beruht weitgehend auf diesem wichtigen Resultat.

BOHR und MOTTELSON<sup>11</sup> haben die Methode von INGLIS kürzlich auf Kerne mit nicht-abgeschlossenen

Schalen ausgedehnt, praktisch unter Aufgabe des früher von ihnen entwickelten physikalischen Bildes (vgl. A und B). Als Resultat ihrer Rechnungen geben sie an, daß man für die Gleichgewichtsverformung eines rotationsellipsoidischen Oszillatorenpotentials genau das Trägheitsmoment für starre Rotation (und nicht etwa für wirbelfreie Strömung) erhält (siehe aber Anm. <sup>10</sup>), daß aber die Berücksichtigung von Zwei-Teilchen-Wechselwirkungen (in einem vereinfachenden Modell) das Trägheitsmoment verkleinert zu der beobachteten Größenordnung.

Im Rechenschema von INGLIS führt die starke Vergrößerung des Trägheitsmoments gegenüber dem für wirbelfreie Strömung gültigen Wert her von der Tatsache, daß es bei nicht-abgeschlossenen Schalen in einem verformten Potential Nukleonzustände ziemlich benachbarter Energien gibt; diese tragen in der zum Trägheitsmoment führenden Störungsrechnung mit kleinen Nennern bei. Damit aber drängt sich die Vermutung auf, daß man auch im Rahmen des ursprünglichen Bildes von BOHR und MOTTELSON (A und B) der experimentellen Erfahrung mehr entsprechende (also größere) Trägheitsmomente erhält, wenn man die Möglichkeit der Besetzung verschiedener energetisch benachbarter Niveaus durch die individuell behandelten Nukleonen geeignet berücksichtigt. In der vorliegenden Arbeit werden die ersten Schritte dieses Programms durchgeführt. Während BOHR und MOTTELSON annehmen, daß im Fall starker Kopplung (kollektive Bewegung langsam gegen individuelle Nukleonenbewegungen) die Komponente des Gesamtdrehimpulses in Richtung der Achse des ellipsoidisch verformten Kerns in ausreichender Näherung eine gute Quantenzahl ist, wird hier ein allgemeinerer Ansatz gemacht, der den von BOHR und MOTTELSON als Spezialfall enthält. Dieser Ansatz wird in einem Ritzschen Variationsverfahren verwendet. Würde der ursprüngliche Lösungsansatz von BOHR und MOTTELSON, der zu dem Trägheitsmoment der wirbelfreien Strömung führt, eine gute Näherungslösung der Grundgleichungen darstellen, so sollte er sich auch bei dem hier verwendeten allgemeineren Variationsansatz im wesentlichen re-

<sup>7</sup> Vgl. etwa die Zusammenstellungen in den zitierten <sup>5, 11</sup> Arbeiten.

<sup>8</sup> Die Größe dieses Faktors hängt ab von dem angenommenen Radius des unverformten Kerns und ist umgekehrt proportional zum Quadrat dieses Radius; obiger Zahlenwert gilt etwa für  $R_0 = 1,2 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \cdot A^{1/3}$ . Der Faktor wird verkleinert, wenn man annimmt, daß die Ausdehnung der Ladungsverteilung im Kern geringer ist als die Ausdehnung der Massenverteilung.

<sup>9</sup> D. INGLIS, Phys. Rev. **96**, 1059 [1954] und **97**, 701 [1955].

<sup>10</sup> Faktoren der Größenordnung eins darf man dabei allerdings nicht zu wörtlich nehmen; sie dürften an Einzelheiten der Voraussetzungen von INGLIS (insbesondere Oszillatorenpotential und Definition der Ausdehnung des Kerns) hängen. Siehe auch die Anm. auf S. 11 der in unserer Anm. <sup>11</sup> genannten Arbeit.

<sup>11</sup> A. BOHR u. B. MOTTELSON, Dan. Mat. Fys. Medd. **30**, Nr. 1 [1955]; im folgenden durch C abgekürzt.

produzieren. Es zeigt sich jedoch, daß das nicht der Fall ist; vielmehr wird die ursprüngliche Wellenfunktion in einer solchen Weise modifiziert, daß sich ein wesentlich größeres Trägheitsmoment ergibt. Eine vollständige quantitative Durchführung erfolgt nicht; einerseits befindet man sich an der Gültigkeitsgrenze der zur Auflösung der Variationsgleichungen verwendeten Störungsrechnung; andererseits scheint es schwierig zu sein, nach dem vorgelegten ziemlich einfachen Verfahren für die Vergrößerung des Trägheitsmoments gegenüber dem hydrodynamischen Wert ein Resultat zu erhalten, das von den Einzelheiten der Nukleonenbesetzung so wenig abhängt wie es die empirischen Daten zu erfordern scheinen.

Aus den Rechnungen dieser Arbeit folgt, daß die Komponente des Gesamtdrehimpulses in der Figurenachse (mit  $K$  bezeichnet) nicht in ausreichender Näherung als gute Quantenzahl betrachtet werden kann. Die Stärke der Beimischung von Wellenfunktionen mit benachbarten  $K$ -Werten ist dabei, qualitativ gesprochen, um so größer, je mehr das Trägheitsmoment vom hydrodynamischen Wert abweicht; ferner nimmt sie innerhalb einer Rotationsbande mit zunehmendem Drehimpuls zu. Dies hat eine Reihe von Folgerungen für die Berechnung von Matrixelementen und damit für die Interpretation beobachteter Größen. Eine Anwendung wird hier gemacht: das Matrixelement für elektrische Quadrupolübergänge innerhalb der niedrigsten Rotationsbande eines doppelt geraden Kerns drückt sich in etwas anderer Weise durch die Verformung aus als die Rechnungen in B ergeben. Es zeigt sich, daß die wahre Verformung größer ist als die nach dem bisherigen Verfahren aus den elektrischen Quadrupolübergängen entnommene; dieser Effekt weist ebenfalls in die Richtung einer Verminderung des Unterschiedes zwischen dem (aus der wahren Verformung folgenden) hydrodynamischen und dem beobachteten Trägheitsmoment, ist wegen seiner Kleinheit jedoch meist ohne Bedeutung. Es ist beabsichtigt, in einer späteren Arbeit auf weitere Auswirkungen der  $K$ -Beimischung einzugehen.

Innerhalb der Gültigkeitsgrenzen der Störungsrechnung zeigt sich ein enger Zusammenhang zwischen den Ergebnissen dieser Arbeit und denjenigen, die man nach dem Verfahren von INGLIS erhält. Wenn die Abweichung des beobachteten Trägheitsmoments vom hydrodynamischen Wert gering ist (was in Wirklichkeit jedoch nicht der Fall ist),

sind die nach beiden Methoden gewonnenen Resultate praktisch identisch. Man kann Argumente dafür angeben, daß das Verfahren von INGLIS nur zulässig ist, wenn diese Abweichung nicht zu groß ist, nicht jedoch, wenn es beispielsweise zum Trägheitsmoment der starren Rotation führt. Es lassen sich in der Methode von INGLIS und in der hier vorgeschlagenen eine Reihe ähnlicher Züge erkennen. Die Wellenfunktion des Kerns sieht in beiden Fällen jedoch ziemlich verschieden aus, so daß die Ähnlichkeit des für das Trägheitsmoment gewonnenen Ergebnisses doch überraschend bleibt.

## 2. Rechnerische Durchführung

Es werde der HAMILTON-Operator des kollektiven Kernmodells in der von BOHR in A angegebenen Form verwendet und gesetzt

$$H = H_p + H_{\beta\gamma} + \tilde{H}. \quad (2)$$

Hierbei soll  $H_p$  die Bewegung der Nukleonen im kugelsymmetrischen Kern beschreiben,  $H_{\beta\gamma}$  allein von den für die Gestalt des verformten Kerns maßgeblichen Koordinaten  $\beta$  und  $\gamma$  abhängen und  $\tilde{H}$  die übrigen Anteile des HAMILTON-Operators enthalten

$$\begin{aligned} H_{\beta\gamma} &= T_{\text{vib}} + \frac{1}{2} C \beta^2, \\ \tilde{H} &= \sum_x \frac{\hbar^2}{2 \Theta_x} (I_x - J_x)^2 \\ &+ \left( \frac{5}{\pi} \right)^{1/2} T \beta \left\{ \cos \gamma \sum_k \frac{3 \omega k^2 - j_k(j_k+1)}{4 j_k(j_k+1)} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{3} \sin \gamma \sum_k \frac{(j_{k_1}^2 - j_{k_2}^2)}{4 j_k(j_k+1)} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Aus  $\beta$  und  $\gamma$  errechnet sich die Verlängerung der Achse  $x$  ( $= 1, 2, 3$ ) des den verformten Kern beschreibenden Ellipsoids gemäß

$$\delta R_x = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta R_0 \cos \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} x \right), \quad (4)$$

ferner das (hydrodynamische) Trägheitsmoment um die jeweilige Achse gemäß

$$\Theta_x = 4 B \beta^2 \sin^2 \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} x \right). \quad (5)$$

Die Größe  $R_0$  stellt den Radius eines bei gleichem Volumen kugelförmigen Kerns dar;  $B$  ist eine Konstante von der Dimension eines Trägheitsmoments

$$B = \frac{3}{8\pi} A M R_0^2 \quad (6)$$

( $A$  = Massenzahl des Kerns,  $M$  = Nukleonenmasse). Der Ausdruck (5) für das Trägheitsmoment folgt aus der Voraussetzung, daß die Kollektivbewegung als inkompressible wirbelfreie Strömung beschrieben werden darf. Speziell für  $\gamma=0$  hat man Rotationssymmetrie um die dritte Achse<sup>12</sup>

$$\delta R_1 = \delta R_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta R_0, \quad \delta R_3 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta R_0, \\ \Theta_1 = \Theta_2 = 3B\beta^2, \quad \Theta_3 = 0. \quad (7)$$

In  $\tilde{H}$  [Gl. (3)] bedeutet  $\vec{I}$  den Gesamtdrehimpuls des Kerns und  $\vec{J}$  den der individuellen Nukleonenbewegung; es sind die Komponenten bezüglich der Hauptachsen des Ellipsoids (d. h. im körperfesten Bezugssystem) zu bilden, das den momentanen kollektiven Deformationszustand des Kerns darstellt. Die Summen sind zu erstrecken über die außerhalb abgeschlossener Schalen liegenden Nukleonen, deren individuelle Freiheitsgrade allein berücksichtigt werden sollen. Die Größen  $\vec{j}_k$  stellen die Drehimpulse dieser Nukleonen, die  $\omega_k$  deren Komponenten in der 3-Achse des körperfesten Systems dar<sup>13</sup>;  $\bar{T}$  ist eine Konstante von der Größenordnung der kinetischen Energie der Nukleonen im Kern.  $H_{\beta\gamma}$  wird im einzelnen nicht verwendet werden; die Bedeutung der dort auftretenden Zeichen kann nötigenfalls aus A entnommen werden.

Das erste Glied in  $\tilde{H}$  stellt nicht eigentlich eine Wechselwirkung zwischen kollektiver und individueller Nukleonenbewegung dar; die hierin scheinbar auftretende Kopplung röhrt her von der Aufteilung des zeitlich konstanten Gesamtdrehimpulses auf individuelle und kollektive Nukleonenbewegung. Die eigentliche Wechselwirkung der beiden Bewegungstypen ist im zweiten Glied von  $\tilde{H}$  enthalten, das im Prinzip bereits bei RAINWATER<sup>1</sup> vorkommt.

<sup>12</sup> Vielfach beschränkt man  $\beta_1$  auf positive Werte und erreicht ein verlängertes bzw. abgeflachtes Rotationsellipsoid durch Wahl von  $\gamma_1=0$  bzw.  $=\pi$ . In unserem Fall werden die Formeln jedoch einfacher, wenn man bei Rotationsymmetrie stets  $\gamma_1=0$  setzt und dafür positives wie negatives Vorzeichen von  $\beta_1$  zuläßt.

<sup>13</sup> Zwischen Operatoren und deren Eigenwerten soll in der Schreibweise nicht unterschieden werden; so bedeutet  $\omega_k$  in Gl. (3) einen Operator,  $\omega'$  in Gl. (28) dagegen eine Zahl. Dasselbe gilt für  $I_3=K$  und  $I_3=\Omega$  [Operatoren in Gl. (14), Eigenwerte in Gl. (18) und an vielen anderen Stellen].

<sup>14</sup> Aus den Rechnungen von S. G. NILSSON, Dan. Mat. Fys. Medd. **29**, Nr. 16 [1955], könnte man im Prinzip einen besseren Ausdruck für die Wechselwirkung zwischen  $\beta$  und den individuellen Nukleonenkoordinaten gewinnen. Da die Rechnungen unter der Annahme  $\gamma=0$  durchgeführt sind, kann allerdings über die  $\gamma$ -Abhängigkeit der Wechselwir-

Die Gültigkeit des angegebenen Ausdrucks ist beschränkt, und zwar auf kleine Verformungen, da  $\beta$  nur linear auftritt und angenommen ist, daß die Drehimpulse der einzelnen Nukleonen noch einigermaßen gute Quantenzahlen sind, und auf die Voraussetzung, daß bei den äußersten Nukleonen (die allein explizit auftreten) die Drehimpulse aller Protonen untereinander gleich sind und ebenso die aller Neutronen (das zu  $\bar{T}$  proportionale Glied würde sonst komplizierter aussehen). Diese Annahmen sind bei den wirklich beobachteten Verformungen der Kerne nicht gut erfüllt<sup>14</sup>. Wesentliche Züge dürften jedoch bereits aus dem vereinfachenden Ansatz (3) zu gewinnen sein; quantitativ allerdings darf man die Resultate nicht zu wörtlich nehmen.

Im Grenzfall starker Kopplung (zwischen kollektiver und individueller Bewegung) wird von BOHR und MOTTELSON (in A und B) in nullter Näherung eine Lösung der Form

$$\Psi = \varphi(\beta, \gamma) \left( D_{MK}^I(\vartheta_i) \chi_\Omega \text{ (Nukleonen)} + (-1)^{I-\sum j_k} D_{M-K}^I(\vartheta_i) \chi_{-\Omega} \text{ (Nukleonen)} \right) \quad (8)$$

angesetzt. Hierbei sind die  $D_{MK}^I(\vartheta_i)$  Kreiselfunktionen ( $I$  = Gesamtdrehimpuls des Kerns,  $M$  = Komponente in raumfester  $z$ -Richtung,  $K$  = Komponente in körperfester 3-Richtung, die bis aufs Vorzeichen ebenfalls als gute Quantenzahl vorausgesetzt wird)<sup>15</sup>. Die Funktionen  $\chi_\Omega$  und  $\chi_{-\Omega}$  sollen aus den Funktionen der individuell berücksichtigten Nukleonen für eine bestimmte Besetzung der  $\omega$ -Niveaus zusammengesetzt sein,

$$\Omega = \sum_k \omega_k, \quad (9)$$

ferner soll  $\chi_{-\Omega}$  aus  $\chi_\Omega$  hervorgehen, indem bei allen Nukleonenfunktionen  $\omega_k$  ersetzt wird durch  $-\omega_k$ . Der Ansatz (8) gehorcht einem Teil der Symmetrie-

kung und damit insbesondere über die Nullpunktsenergie der  $\gamma$ -Schwingungen nichts entnommen werden.

<sup>15</sup> Die  $D_{MK}^I(\vartheta_i)$  sind Funktionen der drei EULERSchen Winkel  $\vartheta_i$ , die die räumliche Orientierung eines Dreibeins (hier der drei Hauptachsen des Ellipsoids) beschreiben. Sie hängen eng zusammen mit den Darstellungsmatrizen  $D_{MM'}^I(\mathcal{R})$  der Gruppe der räumlichen Drehungen  $\mathcal{R}$ : Ist  $\mathcal{R}$  die Drehung, die das Achsenkreuz aus seiner jeweiligen Lage in eine raumfeste Normallage (insbesondere 3-Richtung in  $z$ -Richtung) überführt, so gilt  $D_{MK}^I(\vartheta_i) = D_{KM}^I(\mathcal{R})$ . Aus diesem Zusammenhang folgen alle wichtigen Eigenschaften der Kreiselfunktionen. Die so definierten Kreiselfunktionen sind nicht normiert; der nur von  $I$  abhängige Normierungsfaktor ist, wie auch bei BOHR und MOTTELSON üblich, fortgelassen. — Kreiselfunktionen mit  $K=0$  sind bei geeigneter Definition der Drehwinkel bis auf einen Normierungsfaktor mit den Kugelfunktionen identisch.

forderungen, die aus der Mehrdeutigkeit bei Festlegung der Achsennumerierung des körperfesten Systems folgen [A, Gl. (118)]; die übrigen Symmetrieforderungen brauchen nicht berücksichtigt zu werden, wenn die Amplitude der Nullpunktsschwingungen von  $\gamma$  hinreichend klein ist.

Die vorliegende Arbeit beruht auf einer Erweiterung des Ansatzes (8) in der Form

$$\Psi = \varphi(\beta, \gamma) \psi_M^I(\vartheta_i, \text{Nukleonen}), \quad (10)$$

wobei zwar  $I$  und  $M$  gemäß der Drehinvarianz des Gesamtproblems gute Quantenzahlen sind, über  $K$  jedoch nicht in einschränkender Weise verfügt wird. Die in (10) auftretenden individuellen (d. h. außerhalb abgeschlossener Niveaus befindlichen) Protonen bzw. Neutronen sollen entsprechend der am Anfang dieses Abschnitts gemachten Voraussetzungen jeweils alle den gleichen Drehimpuls besitzen, damit der Wechselwirkungsausdruck in  $\tilde{H}$  [Gl. (3)] gültig ist. Mit Ansatz (10) wird nunmehr in das zum HAMILTON-Operator (2) gehörige Variationsprinzip eingegangen<sup>16</sup>. Variiert man die Funktion  $\varphi(\beta, \gamma)$  frei, die Funktion  $\psi_M^I(\dots)$  jedoch nur innerhalb der angegebenen Einschränkungen, so gewinnt man die beiden Gleichungen

$$\{H_{\beta\gamma} + \langle \tilde{H} \rangle_\varphi - E\} \varphi(\beta, \gamma) = 0 \quad (11)$$

oder ausführlicher

$$\begin{aligned} & \left\{ T_{\text{vib}} + \frac{1}{2} C \beta^2 + \sum_z \frac{\hbar^2}{2 \Theta_z} \langle (J_z - J_z)^2 \rangle_\varphi \right. \\ & + \left( \frac{5}{\pi} \right)^{1/2} \bar{T} \beta \left( \cos \gamma \left\langle \sum_k \frac{3 \omega_k^2 - j_k(j_k+1)}{4 j_k(j_k+1)} \right\rangle_\varphi \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{3} \sin \gamma \left\langle \sum_k \frac{(j_{k_1}^2 - j_{k_2}^2)}{4 j_k(j_k+1)} \right\rangle_\varphi \right) - E \right\} \varphi(\beta, \gamma) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

und

$$\langle \delta \psi_M^I | \langle \tilde{H} \rangle_\varphi - \tilde{E} | \psi_M^I \rangle = 0. \quad (13)$$

Hier bedeutet  $\langle H \rangle_\varphi$  den Erwartungswert bezüglich der Funktion  $\psi_M^I(\dots)$  und entsprechend  $\langle H \rangle_\varphi$  denjenigen bezüglich  $\varphi(\beta, \gamma)$ . Die Größe  $E$  in Gl. (11) stellt die Gesamtenergie abzüglich des Eigenwertes von  $H_p$  dar; die Größe  $\tilde{E}$  in Gl. (13) bedeutet

<sup>16</sup> Der Einfachheit halber ist angenommen, daß  $H_p$  ein Schalenmodelloperator ohne Zwei-Teilchen-Wechselwirkungen ist; alle vorkommenden Zustände sind dann Eigenzustände zu  $H_p$  mit dem gleichen Eigenwert, so daß  $H_p$  überhaupt nicht berücksichtigt zu werden braucht. Etwaige Zwei-Teilchen-Wechselwirkungen müßten andernfalls in den Gln. (11) bis (13) zusätzlich zu  $\tilde{H}$  eingeführt werden.

den von der individuellen Nukleonensbewegung abhängigen Anteil der Energie, d. h. im wesentlichen  $E$  abzüglich (für Zustände ohne Oszillationsquanten) der Nullpunktenergien der  $\beta$ - und  $\gamma$ -Schwingungen.

Die Gln. (12) und (13) sind zu lösen im Sinne eines selbstkonsistenten Verfahrens, d. h. die  $\langle \dots \rangle_\varphi$ -Erwartungswerte in (12) sind mittels der Lösung von (13) zu berechnen und der  $\langle \dots \rangle_\varphi$ -Erwartungswert in (13) mittels der Lösung von (12). Gl. (12) ist von ähnlichem Typ wie diejenige, die von A. BOHR [A, Gl. (97)] zur Bestimmung der  $\beta$ - und  $\gamma$ -Schwingungen benutzt wurde. Insbesondere sind auch hier

$$\langle (K - \Omega)^2 \rangle_\varphi = 0 \quad (14)$$

und

$$\gamma_1 = 0 \quad (15)$$

( $\gamma_1$  = Gleichgewichtswert von  $\gamma$ ) miteinander verträglich; man hat dann axialsymmetrische Verformung des Kerns [vgl. Gl. (7)]. In diesem Fall werde abkürzend gesetzt<sup>17</sup>

$$\left\langle \frac{1}{\Theta_1} \right\rangle_\varphi = \left\langle \frac{1}{\Theta_2} \right\rangle_\varphi = \frac{1}{\Theta} = \frac{1}{3 B \beta_1^2}. \quad (16)$$

Die Annahme (14) soll in dieser Arbeit stets gemacht werden; sie wird sich als widerspruchsfrei durchführbar erweisen. Das Vorzeichen der Gleichgewichtsdeformation  $\beta_1$  ist so zu wählen, daß hiermit der zu  $\bar{T}$  proportionale Term auf der linken Seite von Gl. (12) negativ wird. Interessiert man sich nicht für die Bestimmung der Gleichgewichtsdeformation, so kann man sich für die weitere Untersuchung auf Gl. (13) beschränken.

Die Funktion  $\psi_M^I(\vartheta_i, \text{Nukleonen})$  werde nun als Linearkombination mit zunächst unbestimmten Koeffizienten von Ausdrücken der Gestalt

$$\begin{aligned} \psi_{MK}^I &= \frac{1}{\sqrt{2}} (D_{MK}^I(\vartheta_i) \chi_K(\text{Nukleonen}) \\ &+ (-1)^{I-\sum i_k} D_{M-K}^I(\vartheta_i) \chi_{-K}(\text{Nukleonen})) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{für } K > 0, \quad \psi_{M0}^I = D_{M0}^I(\vartheta_i) \chi_0(\text{Nukleonen}) \quad \text{für } K = 0 *$$

angesetzt. Die auftretenden Abkürzungen sind im Zusammenhang mit Gl. (8) erklärt worden; die

<sup>17</sup> Das letzte Gleichheitszeichen ist nicht streng richtig; es gilt jedoch näherungsweise für hinreichend kleine Nullpunktsschwingungen.

\* Anm. b. d. Korr.: Das ist nur richtig, falls jeder Zustand mit  $\pm \omega$  paarweise besetzt ist; sonst gilt auch für  $K=0$  der darüberstehende Ausdruck.

Funktionen  $\chi_Q$  sind normiert angenommen. Zur Erfüllung von Gl. (14) wurde

$$Q = K \quad (18)$$

gefordert. Es ist zweckmäßig,  $\langle \tilde{H} \rangle_\varphi$  aufzuspalten<sup>18</sup>,

$$\langle \tilde{H} \rangle_\varphi = \tilde{H}_0 + U, \quad (19)$$

in einen Diagonalanteil (in der  $I\omega_k$ -Darstellung)

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0 &= \frac{\hbar^2}{2\Theta} \left[ I(I+1) - K^2 + \sum_k (j_k(j_k+1) - \omega_k^2) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k,m} (j_k - \omega_k)(j_m + \omega_m) \delta(j_k, j_m) \delta(\omega_k, \omega_m - 1) \right] \\ &\quad + \left( \frac{5}{\pi} \right)^{1/2} T \beta_1 \sum_k \frac{3 \omega_k^2 - j_k(j_k+1)}{4 j_k(j_k+1)} \end{aligned} \quad (20)$$

und einen Nichtdiagonalanteil

$$\begin{aligned} U &= U_0 + U_1, \\ U_0 &= \mathcal{N} D \frac{\hbar^2}{2\Theta} (J_1^2 + J_2^2), \\ U_1 &= - \mathcal{N} D \frac{\hbar^2}{\Theta} (I_1 J_1 + I_2 J_2). \end{aligned} \quad (21)$$

Im Unterschied zu der üblichen Behandlung stellen  $\beta_1$  und  $\Theta$  hier Gleichgewichtswerte und nicht Operatoren dar.  $\mathcal{N} D$  bedeutet „Nichtdiagonalelement“; bei praktischen Rechnungen spielt diese Einschränkung keine Rolle. Das Symbol  $\delta(j_k, j_m)$  in Gl. (20) wurde aus der bisherigen Literatur beibehalten; es ist jedoch genau genommen so zu interpretieren, daß

der Wert eins ist, wenn Teilchen  $k$  und  $m$  zur selben Nukleonensorte gehören, sonst jedoch null. In  $\tilde{H}_0$  wurde ein nur für  $K = \pm \frac{1}{2}$  auftretender Term fortgelassen.

Arbeitet man mit dem Ansatz (8) statt mit dem allgemeinen Variationsansatz (10), so erhält man, im wesentlichen unter Benutzung von Gl. (20), ein Rotationsspektrum

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2\Theta} I(I+1) \quad (22)$$

mit dem hydrodynamischen Trägheitsmoment  $\Theta$  gemäß Gl. (16) (vgl. B). Auch der allgemeinere Ansatz (10) führt zu einem Rotationsspektrum, jedoch mit einem abgeänderten „effektiven“ Trägheitsmoment<sup>19</sup>

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2\Theta_{\text{eff}}} I(I+1). \quad (23)$$

Um dies zu zeigen und  $\Theta_{\text{eff}}$  zu berechnen, werde das aus Gl. (13) entstehende lineare Gleichungssystem mittels Störungsrechnung<sup>20</sup> gelöst. Zur Gewinnung von Energietermen der Gestalt (23) interessiert in niedrigster Näherung nur  $U_1$ , denn  $U_0$  liefert keinen den Gesamtdrehimpuls enthaltenden Beitrag zur Energie. Bedeutet  $K_0$  den Wert von  $K (= Q)$  des Hauptterms<sup>21</sup>, d. h. desjenigen, der bei BOHR und MOTTELSON allein berücksichtigt wird, so erhält man als Störungsenergie zweiter Näherung für  $K_0 = 0$ <sup>22</sup>

$$\delta_2 \tilde{E} = - 2 \left( \frac{\hbar^2}{2\Theta} \right)^2 \frac{|\langle \chi_{K_0+1} | J_1 + i J_2 | \chi_{K_0} \rangle|^2}{\tilde{E}_{K_0+1} - \tilde{E}_{K_0}} I(I+1) \quad (24)$$

und für  $K_0 \neq 0$

$$\begin{aligned} \delta_2 \tilde{E} &= - \left( \frac{\hbar^2}{2\Theta} \right)^2 \left\{ \frac{|\langle \chi_{K_0+1} | J_1 + i J_2 | \chi_{K_0} \rangle|^2}{\tilde{E}_{K_0+1} - \tilde{E}_{K_0}} \right\} (I(I+1) - K_0(K_0+1)) \\ &\quad + \frac{|\langle \chi_{K_0-1} | J_1 + i J_2 | \chi_{K_0} \rangle|^2}{\tilde{E}_{K_0-1} - \tilde{E}_{K_0}} (I(I+1) - (K_0-1) K_0) \end{aligned} \quad (25)$$

<sup>18</sup> Für ein einziges Nukleon außerhalb abgeschlossener Niveaus wurde diese Aufspaltung in A mitgeteilt. Die Erweiterung auf mehrere individuell berücksichtigte Nukleonen wurde von K. W. FORD, Phys. Rev. **90**, 29 [1953], angegeben. In derselben Arbeit findet sich auch die Ausdehnung der Bohrschen Symmetriebedingung auf mehrere Teilchen, die von uns in den Gln. (8) und (17) benutzt wurde. Bei FORD werden weitere Nichtdiagonalelemente angegeben, die jedoch im vorliegenden Fall verschwinden. Die Forderung (18) erweist sich nunmehr als widerspruchsfrei durchführbar, da  $U$  nichtverschwindende Matrixelemente nur zwischen Zuständen mit  $\delta K = \delta Q$  ( $= 0$  für  $U_0$ ,  $= \pm 1$  für  $U_1$ ) besitzt.

<sup>19</sup> Es ist diese Gleichung und nicht etwa Gl. (22), die Gl. (1) des 1. Abschnitts entspricht. Nur im 1. Abschnitt wurde  $\Theta$  nicht für das hydrodynamische Trägheitsmoment verwendet.

<sup>20</sup> Die Störungsrechnung unterscheidet sich von der am Schluß von A angedeuteten und später gelegentlich verwendeten dadurch, daß  $\beta_1$  und  $\Theta$  bei uns nicht Operatoren sind. Die sonst bei der  $\beta$ -Integration auftretenden u. U. kleinen Überlappungsintegrale kommen hier also nicht vor. Die vorliegende Untersuchung hat Berührungspunkte mit einer Arbeit von A. K. KERMAN, Dan. Mat. Fys. Medd. **30**, Nr. 15 [1956]. Dort wird  $U_1$  [Gl. (21)] ebenfalls zur Gewinnung eines Zusatzgliedes zum Trägheitsmoment verwendet; da die Arbeit aber auf der üblichen Störungsrechnung beruht, unterscheidet sie sich in Grundgedanken und Durchführung doch wesentlich von der vorliegenden Untersuchung.

<sup>21</sup>  $K_0$  stimmt überein mit dem Gesamtdrehimpuls des energetisch niedrigsten Zustandes der Rotationsbande.

<sup>22</sup> Es wurden die in A angegebenen Matrixelemente verwendet; auch im folgenden wird von den dort mitgeteilten Matrixelementen Gebrauch gemacht werden.

Vielfach gibt es zu jedem  $K = K_0 \pm 1$  mehrere Zustände, die mit dem Hauptterm kombinieren; in Gln. (24) und (25) treten dann entsprechend mehr Glieder auf<sup>23</sup>. Es ist wichtig zu bemerken, daß die Energienenner in diesen Gleichungen den Gesamtdrehimpuls  $I$  nicht enthalten, sofern dabei alle auftretenden  $K$ -Werte von  $\pm \frac{1}{2}$  verschieden sind. Unter Beachtung der Definition (23) und unter Berücksichtigung des vom Hauptterm herrührenden Beitrags (22) erhält man somit für das effektive Trägheitsmoment

$$\frac{1}{\Theta_{\text{eff}}} = \frac{1}{\Theta} \left( 1 - \frac{\hbar^2}{\Theta} \frac{|\langle \chi_1 | J_1 + i J_2 | \chi_0 \rangle|^2}{\tilde{E}_1 - \tilde{E}_0} \right) \quad (26)$$

(für  $K_0 = 0$ ) bzw.

$$\frac{1}{\Theta_{\text{eff}}} = \frac{1}{\Theta} \left[ 1 - \frac{\hbar^2}{2\Theta} \left( \frac{|\langle \chi_{K_0+1} | J_1 + i J_2 | \chi_{K_0} \rangle|^2}{\tilde{E}_{K_0+1} - \tilde{E}_{K_0}} + \frac{|\langle \chi_{K_0-1} | J_1 - i J_2 | \chi_{K_0} \rangle|^2}{\tilde{E}_{K_0-1} - \tilde{E}_{K_0}} \right) \right] \quad (27)$$

(für  $K_0 > 0, \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ <sup>24</sup>); u. U. tritt auf den rechten Seiten wieder eine größere Anzahl von Termen auf. Falls sich die Energienenner als positiv erweisen, erhält man somit in der Tat eine Vergrößerung des Trägheitsmoments gegenüber dem hydrodynamischen Wert.

Dieselbe Störungsrechnung erlaubt, die im Ansatz für  $\psi_M^I(\dots)$  auftretenden Koeffizienten zu bestimmen. Insbesondere die Berücksichtigung von  $U_1$  liefert dabei bereits in erster Näherung eine Beimischung zum Hauptterm durch Zustände, deren Wert von  $K = \Omega$  von diesem um eine Einheit abweicht<sup>25</sup>. Die in der Figurenachse liegende Komponente  $K$  des Gesamtdrehimpulses ist damit nicht länger eine gute Quantenzahl; vielmehr hat man eine  $K$ -Beimischung, die qualitativ um so größer ist, je mehr das effektive Trägheitsmoment von dem hydrodynamischen Wert abweicht, und die innerhalb einer Rotationsbande mit zunehmendem Gesamtdrehimpuls  $I$  zunimmt. Die Komponente des Drehimpulses der Kollektivbewegung in der Figurenachse ( $K - \Omega$ ) bleibt jedoch eine gute Quantenzahl; sie ist nämlich Null. Erst ein Hinausgehen über den Ansatz (10), d. h. die Berücksichtigung einer Korrelation zwischen den  $\beta$ - und  $\gamma$ -Schwingungen und der indi-

viduellen Nukleonensbewegung, würde dazu führen, daß auch  $K - \Omega$  nicht mehr streng konstant ist.

Die weitere Diskussion soll für doppelt gerade Kerne erfolgen unter der speziellen Annahme, daß sich die eine Nukleonensorte in abgeschlossenen Niveaus befindet, von der anderen jedoch im Hauptterm ( $\Omega = K = K_0 = 0$ ) alle Zustände zwischen  $\omega = -\omega'$  und  $\omega = +\omega'$  besetzt werden. Der Kern ist dann verlängert ( $\beta_1 > 0$ ). Der einzige Zustand, der vermöge  $U_1$  mit dem Hauptterm kombiniert, ist dann ein solcher, bei dem alle  $\omega$  zwischen  $-\omega'$  und  $+\omega' - 1$  sowie der Zustand  $\omega = \omega' + 1$  besetzt sind ( $\Omega = K = 1$ ); die entsprechende, zu  $\Omega = -1$  führende Möglichkeit braucht wegen der aus den Symmetrieforderungen folgenden allgemeinen Gestalt (17) der Wellenfunktionen nicht gesondert behandelt zu werden. Man findet für die in Gl. (26) auftretenden Größen<sup>22</sup>

$$|\langle \chi_1 | J_1 + i J_2 | \chi_0 \rangle|^2 = (j - \omega') (j + \omega' + 1) \quad (28)$$

sowie

$$\tilde{E}_1 - \tilde{E}_0 = \frac{\hbar^2}{2\Theta} ((j - \omega') (j + \omega' + 1) - 2) + \left( \frac{5}{\pi} \right)^{1/2} T \beta_1 \frac{3}{4} \frac{2\omega' + 1}{j(j+1)}. \quad (29)$$

Die rechte Seite von Gl. (29) ist positiv, sofern nur  $j$  mindestens gleich  $3/2$  ist. Man erhält dasselbe Ergebnis (allerdings mit  $|\beta_1|$  statt  $\beta_1$ ), wenn man im Hauptterm alle Zustände mit  $\omega \leq -\omega' - 1$  und  $\omega \geq +\omega' + 1$  besetzt; der Kern ist dann abgeflacht ( $\beta_1 < 0$ ). Mittels Gl. (26) findet man also in der Tat eine Vergrößerung des effektiven Trägheitsmoments gegenüber dem hydrodynamischen Wert. Läßt man die Voraussetzung fallen, daß die eine Nukleonensorte nur abgeschlossene Niveaus besetzt, so erhält man einen weiteren subtraktiven Term.

Im Grenzfall starker Kopplung würde man erwarten, daß in Gl. (29) der zweite, von der RAINWATERSchen Kopplung herrührende Term groß gegen den ersten ist. Dann würde auch der Korrekturterm in Gl. (26) klein sein gegen den Hauptterm und das effektive Trägheitsmoment würde sich von dem wirbelfreier Strömung praktisch nicht unterscheiden. Wäre andererseits der erste Summand in Gl. (29)

<sup>23</sup> Man hat nicht-verschwindende Matrixelemente von  $U_1$  allerdings nur zwischen solchen Nukleonenzuständen, die sich im  $\omega$ -Wert nur eines einzelnen Nukleons unterscheiden.

<sup>24</sup> Für  $K_0 = 1/2, 3/2$  ergeben sich Komplikationen infolge Mitwirkung von Zuständen mit  $K = 1/2$ ; diese sollen bei einer späteren Gelegenheit untersucht werden.

<sup>25</sup> Derartige Ausdrücke sind von ALAGA, ALDER, BOHR und MOTTELSON, Dan. Mat. Fys. Medd. **29**, Nr. 9 [1955], angegeben worden; dort allerdings wird eine gewöhnliche Störungsrechnung mit  $\beta$  und  $\gamma$  als quantenmechanischen Variablen durchgeführt.

groß gegen den zweiten, so hätte der subtraktive Term in Gl. (26) praktisch den Zahlenwert 2; der Gültigkeitsbereich der Störungsrechnung wäre dann natürlich bei weitem überschritten. Der zu  $I(I+1)$  proportionale Anteil der Energie müßte dann sorgfältiger bestimmt werden. Man würde in diesem zweiten Fall allerdings auch einen ziemlich großen in  $I(I+1)$  quadratischen Anteil erhalten, während man einige Fälle gut ausgebildeter Rotationsspektren kennt, bei denen dieser Anteil sicher klein ist. Um die Größe der beiden Summanden in Gl. (29) zahlenmäßig zu diskutieren, werde gesetzt

$$R_0 = 1,4 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \cdot \text{A}^{1/3}, \quad (30)$$

womit man

$$\frac{\hbar^2}{2\Theta} = \frac{\hbar^2}{6B\beta_1^2} = \frac{I}{\beta_1^2 A^{5/3}} \cdot 29,4 \text{ MeV} \quad (31)$$

erhält. Für  $A = 170$  und  $\beta_1 = 0,3$  erhält man damit  $\hbar^2/2\Theta = 0,063 \text{ MeV}$ , für  $\beta_1 = 0,4$  dagegen  $\hbar^2/2\Theta = 0,035 \text{ MeV}$ . Mit  $\bar{T} = 20 \text{ MeV}$  ergibt sich andererseits

$$\left(\frac{5}{\pi}\right)^{1/2} \frac{3}{4} \bar{T} |\beta_1| = |\beta_1| \cdot 19 \text{ MeV}, \quad (32)$$

d. h.  $= 5,7 \text{ MeV}$  für  $|\beta_1| = 0,3$  und  $= 7,6 \text{ MeV}$  für  $|\beta_1| = 0,4$ . Die von  $j$  und  $\omega'$  abhängigen Faktoren berechnen sich beispielsweise für  $j = 9/2$  und  $\omega' = 3/2$  zu

$$(j - \omega') (j + \omega' + 1) = 21$$

bzw.

$$(2\omega' + 1)/(j(j+1)) = 0,16.$$

Man erkennt damit, daß beide Summanden in Gl. (29) vergleichbare Größenordnung besitzen. Die Abweichung des Trägheitsmoments vom hydrodynamischen Wert kann daher groß werden; allerdings befindet man sich bereits an der Grenze des Gültigkeitsbereichs der Störungsrechnung.

Die  $K$ -Beimischung, von der oben die Rede war, wirkt sich auf die Berechnung von Matrixelementen aus. Auch der Zusammenhang zwischen dem Matrixelement für elektrische Quadrupolübergänge innerhalb einer Rotationsbande (insbes. zwischen  $I = 2$  und  $I = 0$ ) und der Verformung  $\beta_1$  wird verändert. Das effektive Matrixelement<sup>26</sup> für den  $E2$ -Übergang  $I+2 \rightarrow I$  ergibt sich nämlich jetzt zu<sup>27, 28</sup>

<sup>26</sup> Für die Definition siehe etwa B, Kap. VII.

<sup>27</sup> Zur Gewinnung dieses Ausdrucks, für den wie üblich nur der kollektive Beitrag zum Matrixelement berücksichtigt wurde, reicht die Wellenfunktion, so wie sie sich in erster störungstheoretischer Näherung ergibt, nicht aus. Vielmehr ist die Normierungsbedingung noch in zweiter Näherung zu berücksichtigen.

$$B(E2) = \frac{27}{32\pi^2} (Z e R_0^2 \beta_1)^2 \cdot \left(1 - 12 \left(\frac{\hbar^2}{2\Theta}\right)^2 \frac{|\langle \chi_1 | J_1 + i J_2 | \chi_0 \rangle|^2}{(\tilde{E}_1 - \tilde{E}_0)^2}\right) \frac{(I+1)(I+2)}{(2I+3)(2I+5)}, \quad (33)$$

während bei Verwendung der Wellenfunktion (8) der subtraktive Term fortfallen würde. Die wahre Verformung  $\beta_1$  des Kerns ist also größer als diejenige, die sich bei elementarer Auswertung des beobachteten reduzierten Matrixelementes (ohne Berücksichtigung des subtraktiven Terms) ergeben würde. Im Prinzip ist das wahre hydrodynamische Trägheitsmoment also bereits größer als das aus der „beobachteten“ Verformung gewonnene; quantitativ scheint diese Änderung allerdings meist gering zu sein.

### 3. Vergleich mit dem Verfahren von Inglis

Das Trägheitsmoment, wie es in dieser Arbeit berechnet wird, stimmt mit dem sich nach INGLIS<sup>9</sup> ergebenden überein, falls der Unterschied zwischen effektivem und hydrodynamischem Trägheitsmoment gering ist (was der wirklichen Situation allerdings nicht gerecht wird). Bei uns ist der Korrekturterm in den Gln. (26) und (27) nämlich dann klein und man kann (der Einfachheit halber für  $K_0 = 0$ ) schließen

$$\Theta_{\text{eff}} = \Theta + \frac{\hbar^2 |\langle \chi_1 | J_1 + i J_2 | \chi_0 \rangle|^2}{\tilde{E}_1 - \tilde{E}_0}, \quad (34)$$

wobei daran erinnert sei, daß  $\Theta$  das hydrodynamische Trägheitsmoment nach Gl. (16) bedeutet. Bei der vorausgesetzten Kleinheit des zweiten Summanden kann auch im Nenner [d. h. in Gl. (29)] der zu  $\hbar^2/2\Theta$  proportionale Term fortgelassen werden, so daß dort einfach die Differenz der Nukleonenergien für verschiedene Besetzung der  $\omega$ -Niveaus in einem verformten statischen Potential steht. Die Methode von INGLIS andererseits liefert für das effektive Trägheitsmoment den allgemeinen Ausdruck [vgl. etwa C, Gl. (5)]

$$\Theta_{\text{eff}} = 2\hbar^2 \sum_i \frac{|\langle i | J_1 | 0 \rangle|^2}{E_i - E_0}, \quad (35)$$

<sup>28</sup> Es ist bemerkenswert, daß die  $I$ -Abhängigkeit von  $B(E2)$  (wenigstens in niedrigster nicht-verschwindender Näherung) durch die Berücksichtigung der  $K$ -Beimischung nicht verändert wird. Es handelt sich hierbei um einen allgemeinen Zug von Übergängen innerhalb einer Rotationsbande.

wobei aber jetzt alle Nukleonen und nicht nur diejenigen außerhalb abgeschlossener Schalen zu berücksichtigen sind. Im Nenner sind jeweils die Teilchenenergien im verformten Potential einzusetzen. Die Summe in Gl. (35) wird jetzt zweckmäßig aufgespalten in zwei Teile, wobei der erste (in dem von INGLIS sowie BOHR und MOTTELSON (in C) verwendeten Oszillatortpotential) Übergänge zwischen Zuständen verschiedener Oszillatorquantenzahl enthält, der zweite jedoch solche innerhalb derselben Oszillatorschale<sup>29</sup>. Der erste Anteil liefert nach INGLIS das hydrodynamische Trägheitsmoment<sup>30</sup>, also den ersten Summanden in Gl. (34), während der zweite Anteil praktisch mit dem zweiten Summanden derselben Gleichung übereinstimmt. Im einzelnen ist dabei noch zu beachten, daß das Matrixelement von  $J_1 + i J_2$  doppelt so groß ist wie das von  $J_1$  und daß ein Faktor 2 in der Formulierung nach INGLIS daher röhrt, daß dort der Hauptterm ( $\Omega = 0$ ) sowohl mit  $\Omega = +1$  wie mit  $\Omega = -1$  kombiniert. Der Zahlenfaktor vor dem zweiten Glied stimmt daher bei INGLIS und bei uns genau überein; die quadrierten Matrixelemente werden nur im Grenzfall verschwindender Deformation identisch, da sie bei INGLIS mit Wellenfunktionen im deformierten Potential, hier aber (als Folge vereinfachender Grundannahmen) mit solchen im undeformierten Potential gebildet sind. Diese Übereinstimmung der nach beiden Methoden gewonnenen Trägheitsmomente besteht auch für  $K_0 > 0$  (sowie — zur Vermeidung von Komplikationen<sup>24</sup> —  $\neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ ).

Es bestehen in der Tat Ähnlichkeiten zwischen dem Verfahren von INGLIS und demjenigen, das in dieser Arbeit verwendet wird. In beiden Fällen wird eine allen in der Wellenfunktion auftretenden Nukleonenkonfigurationen gemeinsame Deformation des Kerns vorausgesetzt [bei INGLIS durch Deformation des äußeren Potentials, hier durch den Ansatz (10)]. Als Folge der jeweiligen Rechnung ergeben sich bei INGLIS wie auch hier zu dem Hauptterm Nukleonenzustände beigemischt, deren  $\Omega$ -Werte sich von dem des Hauptterms um eine Einheit unterscheiden. Bei

<sup>29</sup> Vgl. C, Gl. (12). Dort sollte man allerdings besser  $n_y$  ersetzen durch  $(N-n_z)/2$ , da für die einzelnen Nukleonen nicht  $n_y$ , sondern der Drehimpuls  $\omega$  um die  $z$ -Achse als gute Quantenzahl zu behandeln ist. Die in C gegebenen Resultate dürften durch eine derartige Abänderung jedoch nicht beeinflußt werden.

<sup>30</sup> Von INGLIS ist das nur für abgeschlossene Schalen gezeigt worden. Hat man außer abgeschlossenen Schalen auch eine äußere unabgeschlossene Schale, so verhindern die äußeren Nukleonen zwar einige der für die inneren Nukleonen

uns ist mit der Änderung von  $\Omega$  zugleich eine von  $K$  verbunden, so daß die Komponente des Drehimpulses in der Figurenachse (d. h.  $K - \Omega$ ) Null bleibt. Bei INGLIS andererseits wird die kollektive Drehung (d. h. diejenige des äußeren Potentials) klassisch und nicht quantenmechanisch behandelt; da sie aber um eine zur Figurenachse senkrechte Richtung erfolgt, ist auch dort die Komponente der Winkelgeschwindigkeit in der Figurenachse gleich Null. Im Grundzustand einer Rotationsbande tritt in der hier benutzten quantenmechanischen Formulierung keine Beimischung eines Nukleonenzustandes auf, dessen  $\Omega$ -Wert (positiv gedacht) um eine Einheit größer ist als der des Hauptterms; dieser typisch quantenmechanische Zug zeigt sich bei INGLIS natürlich nicht.

Die Gesamtwellenfunktionen sehen in den beiden Fällen (INGLIS und diese Arbeit) jedoch recht verschieden aus. Bei uns wird im Anschluß an BOHR (A) die kollektive Bewegung dargestellt durch die quantenmechanische Deformationsparameter  $\beta$  und  $\gamma$  sowie den Drehimpuls  $\vec{I} - \vec{J}$  der kollektiven Rotation, während die individuellen Freiheitsgrade der Nukleonen nur für die äußersten Teilchen berücksichtigt werden. Bei INGLIS hingegen werden Deformation und Rotation (genau genommen nicht des Kerns sondern des Potentials) als vorgegebene klassische Größen behandelt und sind nicht quantenmechanische Freiheitsgrade; dafür enthält die Wellenfunktion jetzt die Koordinaten aller Nukleonen, wobei die zur Winkelgeschwindigkeit proportionale Beimischung anderer Zustände der inneren Nukleonen in gewisser Weise einen Ersatz für die hydrodynamische Beschreibung der kollektiven Nukleonensbewegung darstellt. Es bleibt daher doch überraschend, daß so verschiedene Wellenfunktionen in manchen Fällen zu praktisch übereinstimmenden Resultaten führen<sup>31</sup>.

Der enge Zusammenhang zwischen den nach INGLIS gewonnenen und dem von uns aus dem ursprünglichen physikalischen Bild von BOHR und MOTTELSON hergeleiteten Ergebnissen besteht nur, wenn das effektive Trägheitsmoment vom hydrodynamischen

sonst möglichen Übergänge. Andererseits besteht für die äußeren Nukleonen aber jetzt die Möglichkeit des Übergangs in die nächstfolgende Schale; hierdurch dürfte die Unterdrückung von Übergangsmöglichkeiten für die inneren Nukleonen im wesentlichen aufgewogen werden.

<sup>31</sup> Hier wurde das nur für die Trägheitsmomente gezeigt. In einer späteren Arbeit soll nachgewiesen werden, daß das selbe auch bei den statischen magnetischen Momenten richtig ist.

Wert nicht allzu verschieden ist. Man kann sich aber Gründe für die Vermutung überlegen, daß die Methode von INGLIS überhaupt nur glaubhaft anwendbar ist, solange sie zu keiner allzu großen Abweichung vom hydrodynamischen Trägheitsmoment führt. Ob die empirisch gefundene Abweichung in diesem Sinn bereits als „allzu groß“ angesehen werden muß, soll dabei offenbleiben. Bei INGLIS wird die kollektive Rotation klassisch beschrieben; das ist jedoch nur erlaubt, wenn der kollektive Drehimpuls (gemessen in Einheiten  $\hbar$ ) Werte annimmt, die groß sind gegen eins. Man darf daher in der Störungsrechnung die Winkelgeschwindigkeit nicht ohne weiteres gegen Null gehen lassen und dann den Koeffizienten des in der Winkelgeschwindigkeit quadratischen Gliedes mit dem halben Trägheitsmoment identifizieren. Vielmehr muß man prüfen, ob sich die Winkelgeschwindigkeit überhaupt so wählen läßt, daß einerseits der Drehimpuls genügend groß ist für eine klassische Behandlung und daß andererseits doch die höheren Glieder der Störungsrechnung klein bleiben; wenn das nicht möglich ist, scheinen quantitative Resultate nach der Methode von INGLIS nicht gezogen werden zu können.

Zur Durchführung dieses Gesichtspunktes werde in der nach INGLIS errechneten Störungsenergie zweiter Näherung die Winkelgeschwindigkeit der kollektiven Rotation durch deren Drehimpuls  $R$  ersetzt; definiert man das Trägheitsmoment wie üblich, so erhält man also

$$\delta_2 E = \hbar^2 R^2 / 2 \Theta_{\text{eff}}, \quad (36)$$

wobei  $\Theta_{\text{eff}}$  im wesentlichen durch Gl. (34) gegeben ist. In Gl. (34) ist der erste Term, das hydrodynamische Trägheitsmoment, proportional zum Quadrat des Deformationsparameter  $\beta_1$ ; das zweite Glied,

<sup>32</sup> Da in Gl. (36) der Drehimpuls  $\vec{R}$ , in Gl. (23) jedoch der Drehimpuls  $\vec{I}$  vorkommt ( $\vec{I} = \vec{R} + \vec{J}$ ), erscheint es nicht ausgeschlossen, daß sogar  $R \gg j$  gefordert werden muß, damit die Größe  $\Theta_{\text{eff}}$  in Gl. (36) mit dem Trägheitsmoment in der Rotatorformel identifiziert werden darf.

der Korrekturterm, ist dagegen als Folge der auftretenden Energienenner zu  $\beta_1$  umgekehrt proportional. Um für gegebenes  $R$  die Anwendbarkeit der Störungsrechnung zu beurteilen, ist die Störungsenergie Gl. (36) zu vergleichen mit der Energiedifferenz benachbarter Nukleonenniveaus, d. h. mit den Größen, die im Nenner des Korrekturterms in Gl. (34) auftreten. Gl. (36) ist also durch eine derartige charakteristische, ebenfalls zu  $\beta_1$  proportionale Energiedifferenz zu teilen, und es ist dann zu untersuchen, ob die entstehende Größe klein gegen eins ist; nur in diesem Fall ist die Störungsrechnung zulässig. Der so entstehende Ausdruck enthält im Nenner einen zu  $\beta_1^3$  proportionalen Summanden (herrührend vom hydrodynamischen Trägheitsmoment) sowie einen  $\beta_1$ -unabhängigen Summanden (herrührend vom Korrekturterm). Wählt man nun die Verformung so klein, daß der Einfluß des hydrodynamischen Terms gegenüber der „Korrektur“ vernachlässigt werden kann, so hat, wie man aus Gl. (28) entnimmt, der ganze Ausdruck etwa die Größenordnung  $(R/j)^2$ , ist wegen der Forderung  $R \gg 1$  also keineswegs klein<sup>32</sup>. Ist die Deformation andererseits so groß, daß der hydrodynamische Beitrag überwiegt, so ist nach dem oben formulierten Kriterium die Störungsrechnung zulässig. Deshalb erscheint es möglich, daß nicht nur das Verfahren dieser Arbeit sondern auch die Methode von INGLIS versagt, wenn das effektive Trägheitsmoment von dem wirbelfreier Strömung sehr verschieden ist.

Herrn Prof. W. HEISENBERG danke ich für sein Interesse an den vorliegenden Untersuchungen und für klärende Diskussionen. Ferner danke ich einer Reihe von Angehörigen und Gästen des Max-Planck-Instituts für Physik für Diskussionen und kritische Durchsicht des Manuskripts, unter ihnen besonders Herrn K. W. FORD. Herrn A. BOHR danke ich für eine interessante Korrespondenz in Zusammenhang mit einem vorläufigen Manuskript dieser Arbeit. Die Anfänge der Untersuchung gehen zurück auf eine Diskussionsbemerkung von Herrn G. SÜSSMANN.